# Theori Cynrychioliad a Hynodion Cyniferydd Symplegol

Gwyn Bellamy

*Ysgol Mathemateg ac Ystadegau, Prifysgol Glasgow*

Cyflwynwyd: 20 Gorffennaf 2018; Derbyniwyd: 4 Mawrth 2019

**Crynodeb:** Mae rhan gyntaf yr erthygl hon yn gyflwyniad anffurfiol i theori cynrychioliadau (*representation theory*) y grŵp cymesur (*symmetric group*). Mae'r erthygl wedi ei hanelu at y mathemategydd cyffredin nad yw'n gwybod unrhyw beth am theori cynrychioliadau. Yn yr ail ran, rydym yn esbonio, yn fwy cyffredinol, sut y gellir defnyddio theori cynrychioliadau i astudio hynodion cyniferydd symplectig (*symplectic quotient singularities*). Yn wir, gallwn ddefnyddio theori cynrychioliadau i benderfynu pan fo'r gofodau hynod hyn yn derbyn cydraniad crepant (*crepant resolution*).

**Allweddeiriau:** theori cynrychioliadau, grŵp cymesur, hynodion cyniferydd, cydraniad crepant, grwpiau meidraidd, geometreg algebraidd.

## Representation Theory and Symplectic Quotient Singularities

**Abstract:** The first part of this article is an informal introduction to the representation theory of the symmetric group, which is intended for the working mathematician who knows no representation theory. In the second part we explain, more generally, how representation theory can be used to study symplectic quotient singularities. Namely, one can use representation theory to decide when these singular spaces admit crepant resolutions.

**Key words:** representation theory, symmetric group, quotient singularities, crepant resolutions, finite groups, algebraic geometry.

Coleg Cymraeg Cenedlaethol
ISSN: 1741-4261
http://gwerddon.cymru

## Cyflwyniad

Mae gan theori cynrychioliadau hanes cyfoethog sy'n dyddio'n ôl i waith arloesol Frobenius ar ddiwedd y bedwaredd ganrif ar bymtheg ar theori cynrychioliadau grwpiau meidraidd (*finite groups*). Ers hynny, mae wedi tyfu i fod yn faes eang sy'n cwmpasu theori cynrychioliadau algebrâu dimensiynol-feidraidd (*finite-dimensional algebras*), theori cynrychioliadau algebrâu dimensiynol-anfeidraidd (*infinite-dimensional algebras*), theori Lie, theori cynrychioliadau geometrig (*geometric representation theory*), ac, wrth gwrs, theori cynrychioliadau algebrâu grŵp. Er gwaethaf ei draddodiad hir, mae mwy o weithgarwch yn y maes heddiw nag erioed. Mae hyn yn rhannol oherwydd ei fod â chymwysiadau i feysydd mathemategol eraill megis geometreg algebraidd (*algebraic geometry*), theori clymau (*knot theory*), systemau integreiddio (*integrable systems*), a chyfuniadeg (*combinatorics*), yn ogystal â ffiseg, cyfrifiadureg a chemeg damcaniaethol. Yn yr erthygl hon, rydym yn canolbwyntio ar un o'r cymwysiadau hyn, sef geometreg algebraidd symplectig.

Mae gan yr erthygl hon ddwy ran. Mae'r gyntaf yn gyflwyniad anffurfiol i theori cynrychioliadau'r grŵp cymesur. Byddwn nid yn unig yn cyflwyno'r darllenydd i syniadau sylfaenol y maes, ond byddwn hefyd yn ceisio rhoi syniad iddo o'r sefyllfa gyfredol a'r problemau agored pwysig yn y maes. Dylai'r rhan hon fod yn hygyrch i unrhyw un sydd wedi astudio'r ddwy flynedd gyntaf o radd Mathemateg israddedig. Yn yr ail ran, rydym yn disgwyl ychydig yn fwy oddi wrth y darllenydd, sef dealltwriaeth o'r ffeithiau sylfaenol mewn geometreg algebraidd. Yn y rhan hon, disgrifiwn y cynnydd a wnaed yn yr ymdrech i ddosbarthu'r grwpiau symplectig meidraidd lle y mae gan eu hynodyn cyniferydd (*quotient singularity*) cyfatebol gydraniad crepant. Ymdrechwn hefyd i esbonio'r cymhelliant y tu ôl i'r rhaglen waith hon. Mae'r rhaglen waith hon bellach bron wedi ei chwblhau, ac rydym yn crynhoi'r sefyllfa gyfredol.

## 1 Rhan I: Y grŵp cymesur

Datblygwyd theori cynrychioliadau yn gyntaf yng nghyd-destun cynrychioliadau grŵp. Datblygwyd hyn yn systematig yng ngwaith Frobenius yn ystod hanner olaf y bedwaredd ganrif ar bymtheg. Ers hynny, mae wedi datblygu'n rhan bwysig o fathemateg bur, gyda chymwysiadau i lawer o feysydd gwyddoniaeth eraill (e.e. Cemeg). Er mwyn ysgogi theori cynrychioliadau grwpiau meidraidd, ystyriwn enghraifft allweddol y grŵp cymesur. Fe gofiwch mai'r grŵp cymesur Sn yw'r grŵp or holl drynewidiadau (*permutations*) o set o faint $n$, e.e. mewn nodiad cylchred,

$$\mathfrak{S}_3 = \{1, (12), (23), (13), (123), (132)\}. \tag{1}$$

Rydym eisiau deall cynrychioliadau'r grŵp $\mathfrak{S}_n$. Hynny yw, rydym am ystyried yr holl ffyrdd posibl o gynrychioli $\mathfrak{S}_n$ fel grŵp matrics. Er enghraifft, mae gan y grŵp uchod gynrychioliad naturiol o ddimensiwn dau:

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right\}, \tag{2}$$

lle y mae pob un o'r trynewidiadau yn (1) yn cael eu hanfon at y matrics cyfatebol yn (2). Er mwyn rhoi'r diffiniad ffurfiol o gynrychioliad, rydym yn gosod maes $\mathbb{K}$. Trwy gydol yr erthygl, rydym yn tybio bod $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$ yn algebraidd-gaeedig (*algebraically closed*).

**Diffiniad 1.** *Mae* cynrychioliad *o $\mathfrak{S}_n$ yng ngofod fector dimensiynol-feidraidd $V$ dros $\mathbb{K}$ gyda gweithred*

$$\mathfrak{S}_n \times V \to V, \quad (\sigma, v) \mapsto \sigma \cdot v$$

*er mwyn bod*

*(a) y map $\sigma \cdot - : V \to V$ yn llinol am bob $\sigma \in \mathfrak{S}_n$,*

*(b) $1 \cdot v = v$, am bob $v \in V$,*

*(c) $\sigma_1 \cdot (\sigma_2 \cdot v) = (\sigma_1\sigma_2) \cdot v$, am bob $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathfrak{S}_n$ a $v \in V$.*

Er enghraifft, cymerwch $V$ i fod yn ofod fector dau ddimensiwn dros $\mathbb{K}$, gyda sylfaen $\{v_1, v_2\}$, a diffiniwch

$$(12) \cdot v_1 = -v_1, \quad (12) \cdot v_2 = v_1 + v_2,$$
$$(23) \cdot v_1 = v_1 + v_2, \quad (23) \cdot v_2 = -v_2.$$

Gan fod pob elfen o $\mathfrak{S}_3$ yn lluoswm o rywfaint o'r trynewidiadau $(1, 2)$ a $(2, 3)$, mae'r fformiwlâu uchod, ynghyd â phriodwedd (c) o'r diffiniad o gynrychioliad, yn diffinio gweithred pob elfen o $\mathfrak{S}_3$ ar $V$. Yn y modd hwn, gellir mynegi pob $\sigma \in \mathfrak{S}_3$ fel matrics $2 \times 2$ penodol. Rydym yn adfer y cynrychioliad matrics o (2). Rydym am allu disgrifio 'pob' cynrychioliad posibl y grŵp $\mathfrak{S}_n$. Yn amlwg, mae hyn yn rhy annelwig, fel y nodwyd. Ond un ffaith allweddol yr ydym yn gobeithio ei chyfleu yw bod yr ateb yn dibynnu'n helaeth ar nodwedd (*characteristic*) y maes $\mathbb{K}$.

## 1.1 Cynrychioliadau anostyngadwy

Er mwyn gwneud y broblem yn fwy penodol, mae angen ffordd yn gyntaf i dorri cynrychioliadau i'w darnau symlaf. Y syniad cywir yw cynrychioliad anostyngadwy.

**Diffiniad 2.** *Mae* isgynrychioliad *(subrepresentation) $W$ o $V$ yn is-ofod $W \subseteq V$ fel bod $\sigma \cdot w \in W$ am bob $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ a $w \in W$. Dywedir bod y cynrychioliad $V$ yn* anostyngadwy *(irreducible) os mai'r unig isgynrychioliad o $V$ yw $\{0\}$ neu $V$.*

Meddyliwch am gynrychioliadau fel moleciwlau - maen nhw'n cael eu hadeiladu o atomau mewn ffordd gymhleth (y cynrychioliadau anostyngadwy). Felly, rydym yn naturiol yn cael ein harwain at ofyn: beth yw'r atomau? Sut y gallwn ni ludo'r atomau i wneud moleciwlau? Yn gyntaf, disgrifiwn rai enghreifftiau sylfaenol.

**Enghraifft 3** (Y cynrychioliad distadl (*trivial*))**.** *Cymerwch* dist $= \mathbb{K}\{v_0\}$*, y gofod fector un dimensiwn gyda'r sylfaen* $v_0$*, a*

$$\sigma \cdot v_0 = v_0, \quad \forall\, \sigma \in \mathfrak{S}_n.$$

Y cynrychioliad distadl yw'r cynrychioliad symlaf.

**Enghraifft 4** (Y cynrychioliad arwydd)**.** *Cymerwch* arw $= \mathbb{K}\{w_0\}$ *gyda*

$$\sigma \cdot w_0 = (-1)^{\mathrm{hyd}(\sigma)} w_0, \quad \forall\, \sigma \in \mathfrak{S}_n$$

*lle y mae* $\mathrm{hyd}(\sigma)$ *yn dynodi hyd y trynewidiad* $\sigma$*.*

Sylwch fod dist = arw os, a dim ond os, yw nodwedd $\mathbb{K}$ yn 2. Gan fod y cynrychioliadau hyn yn un dimensiwn, maent o reidrwydd yn anostyngadwy. Yn gyffredinol, nid oes rhaid i gynrychioliad anostyngadwy fod yn un dimensiwn, fodd bynnag.

## 1.2 Y cynrychioliad adlewyrchu

Gadewch i $V$ fod yn ofod fector gyda sylfaen $\{x_1, \ldots, x_n\}$, a lluoswm mewnol a ddiffinnir gan $\langle x_i, x_j \rangle = \delta_{i,j}$. Rydym yn gwneud $V$ yn gynrychioliad o $\mathfrak{S}_n$ fesul cam

$$\sigma \cdot x_i = x_{\sigma(i)}, \quad \forall\, \sigma \in \mathfrak{S}_n.$$

Nid yw'r cynrychioliad $V$, y cynrychioliad trynewid (*permutation representation*), yn anostyngadwy. Ond mae'r is-ofod

$$\mathfrak{h} = \left\{ a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n \in V \;\middle|\; \sum_i a_i = 0 \right\}$$

yn isgynrychioliad anostyngadwy a elwir yn cynrychioliad adlewyrchu (*reflection representation*). Mae'r trynewidiadau $(i, j) \in \mathfrak{S}_n$ yn gweithredu fel

$$(ij) \cdot v = v - \langle v, x_i - x_j \rangle (x_i - x_j).$$

Sylwch mai dyma'r union fformiwla ar gyfer adlewyrchiad orthogonol. Mae hyn yn gwireddu $\mathfrak{S}_n$ fel cymesuredd y $n$-simplecs, e.e. $\mathfrak{S}_3$ yw grŵp cymesuredd y triongl a $\mathfrak{S}_4$ yw grŵp cymesuredd y tetrahedron.

Gan ddychwelyd at gynrychioliadau cyffredinol, mae gennym ddiddordeb mewn dau gwestiwn:

(A) Beth yw cynrychioliadau anostyngadwy y grŵp cymesur $\mathfrak{S}_n$?

(B) Sut y gallwn ddadelfennu cynrychioliad cyffredinol yn gynrychioliadau anostyngadwy?

Cyn y gallwn hyd yn oed ddechrau ateb y cwestiynau hyn, mae angen penderfynu pa bryd y mae dau gynrychioliad yn gyfartal. Dywedir bod y cynrychioliadau $V$ a $W$ o $\mathfrak{S}_n$

yn *isomorffig* os oes yna isomorffedd gofod fector $\phi\colon V \to W$ fel bod

$$\phi(\sigma \cdot v) = \sigma \cdot \phi(v)$$

am bob $v \in V$ a $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Mewn theori cynrychioliadau, mae gennym ddiddordeb mewn dosbarthu cynrychioliadau hyd at isomorffedd.

Os yw nodwedd y maes $\mathbb{K}$ yn sero, neu fwy na $n$, yna mae gennym ateb cyflawn i (A) a (B). Yr ateb ar gyfer (B) yw Theorem Maschke (gweler James et al. 2001) - mae pob moleciwl yn atom! Mae hyn yn ganlyniad cyffredinol o theori cynrychioliadau grwpiau meidraidd dros faes o nodwedd sero, sy'n dweud bod pob cynrychiolad yn swm union (*direct sum*) ei isgynrychioliadau anostyngadwy. At hynny, gwelir yn hawdd fod gan bob grŵp, hyd at isomorffedd, dim ond feidraidd nifer o gynrychioliadau anostyngadwy.

Os yw nodwedd y maes $\mathbb{K}$ rhwng 2 a $n$, yna

(A) Mae ateb rhannol yn bodoli (fel y gwelwn).

(B) Mae'n sefyllfa anobeithiol!

Er y gallwn, yn bennaf, ddosbarthu'r atomau sy'n ymddangos yn (A), ymddengys fod disgrifio'n union sut mae'r atomau'n glynu yn dasg anobeithiol (B). Mewn ystyr mathemategol manwl, mae hon yn broblem 'wyllt'.

### 1.3 Ymraniadau

Rhoddir dosbarthiad o gynrychioliadau anostyngadwy ar gyfer y grŵp cymesur mewn nodwedd sero (neu nodwedd uwch na $n$) o ran gwrthrychau cyfuniadol gwych o'r enw ymraniadau. Mae *ymraniad* (*partition*) o $n$ yn ddilyniant ddigynnydd o gyfanrifau positif $\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots > 0)$ fel bod $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots = n$; yn y sefyllfa hon, rydym yn ysgrifennu $\lambda \vdash n$. Er enghraifft, yr ymraniadau o 5 yw:

$$(5), \quad (4,1), \quad (3,2), \quad (3,1,1), \quad (2,2,1), \quad (2,1,1,1), \quad (1,1,1,1,1).$$

**Theorem 5** (I. Schur)**.** *Os yw nodwedd $\mathbb{K}$ yn sero yna mae ymraniadau o $n$ yn gweithredu fel paramedr ar gyfer cynrychioliadau anostyngadwy $\mathfrak{S}_n$,*

$$\lambda \vdash n \quad \leftrightarrow \quad V_\lambda.$$

Wrth 'paramedr', rydym yn golygu:

- Fod pob cynrychioliad anostyngadwy $V$ yn isomorffig i $V_\lambda$, am ryw $\lambda \vdash n$.
- Os yw $V_\lambda$ yn isomorffig i $V_\mu$, yna mae $\lambda = \mu$.

**Sylwad 6.** *Yn y lle cyntaf, datblygwyd theori cynrychioliadau grwpiau meidraidd, a theori cynrychioliadau'r grŵp cymesur yn arbennig, gan ymchwil Fredinand Frobenius a'i fyfyriwr PhD Issai Schur (gyda llawer o gyfraniadau pwysig gan Richard Brower) yn ystod y cyfnod 1880–1905. Gweler Curtis (1999) am ganllaw cynhwysfawr iawn i ddatblygiad hanesyddol y maes.*

### 1.4 Diagramau Young

Er mwyn ein helpu i delweddu ymraniadau yn well, ac archwilio eu cyfuniadau yn ddyfnach, cynrychiolwn bob ymraniad fel diagram Young:

$$\mu = (4, 2, 2) = \ydiagram{4,2,2} \quad \text{neu} \quad \lambda = (3, 2, 1) = \ydiagram{3,2,1}.$$

Er enghraifft, rydym wedi gweld:

$$\begin{aligned} \mathrm{dist} &= V_\lambda, \quad \text{lle y mae} \quad \lambda = \ydiagram{5} = (n), \\ \mathfrak{h} &= V_\mu, \quad \text{lle y mae} \quad \mu = \ydiagram{4,1} = (n-1, 1), \\ \mathrm{arw} &= V_\rho, \quad \text{lle y mae} \quad \rho = \ydiagram{1,1,1,1,1} = (1, \ldots, 1). \end{aligned}$$

Yn amlwg, trwy'r erthygl, rydym wedi cymryd bod $n = 5$.

### 1.5 Sylfaen

Ar ôl rhoi paramedriad haniaethol o gynrychioliadau anostyngadwy y grŵp cymesur, mae'n codi'r cwestiwn amlwg: sut mae'r cynrychioliadau hyn yn edrych mewn gwirionedd? Yr ateb mwyaf cyflawn i gwestiwn o'r math hwn fyddai rhoi sylfaen eglur i bob cynrychioliad a disgrifio sut mae pob elfen o'r grŵp yn gweithredu ar bob elfen yn y sylfaen.

Er mwyn gwneud hyn, rhaid inni gyflwyno ychydig mwy o gyfuniadeg. Yn arbennig, mae angen y syniad o *tableau safonol* (*standard tableau*) arnom. Mae gan tableaux safonol lenwad o $\lambda$ gyda $\{1, \ldots, n\}$ fel bod y rhifau'n cynyddu ar hyd y rhesi ac ar hyd y colofnau. Er enghraifft,

$$\begin{ytableau} 1 & 3 & 5 & 6 \\ 2 & 3 \end{ytableau} \in \mathrm{Std}(4, 2), \quad \text{ond} \quad \begin{ytableau} 4 & 3 & 2 & 6 \\ 1 & 5 \end{ytableau} \notin \mathrm{Std}(4, 2).$$

**Theorem 7** (A. Young)**.** *Mae gan y cynrychioliad $V_\lambda$ sylfaen o $\{v_T \mid T \in \mathrm{Std}(\lambda)\}$.*

Gan ddefnyddio Theorem Young, ynghyd â chyfuniadeg clyfar, mae hefyd yn bosibl dod o hyd i fformiwla ar gyfer dimensiwn y cynrychioliad. Yn gyntaf, mae angen un diffiniad cyfuniadol ychwanegol arnom. Dewiswch focs $\square$ yn niagram Young. Gan gynnwys y bocs ei hun, cyfrwch faint o flychau sydd yn uniongyrchol islaw ac yn uniongyrchol i'r dde o'r blwch hwnnw. Gelwir hyn yn *hyd bachyn* (*hook length*) y bocs $\square$, a ddynodir gan $h(\square)$. Er enghraifft, yn y diagram Young canlynol, y cofnod ym mhob bocs yw hyd y bocs hwnnw:

$$\lambda = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 7&5&4&2\\\hline 6&4&3&1\\\hline 4&2&1\\\cline{1-3} 1\\\cline{1-1}\end{array} = (4,4,3,1). \tag{3}$$

**Canlyneb 8.** *Gadewch i $\lambda$ fod yn ymraniad o $n$. Yna,*

$$\dim V_\lambda = n! \prod_{\square\in\lambda} \frac{1}{h(\square)}.$$

Er enghraifft, os mai $\lambda$ yw'r ymraniad $(4,4,3,1)$ o 12 fel yn (3), yna mae'r fformiwla uchod yn dweud wrthym fod $\dim V_\lambda = 2970$.

**Enghraifft 9.** *Os ydym yn cymryd $\lambda = (4,2)$ yna mae'r set* $\mathrm{Std}(4,2)$ *yn gyfartal ag:*

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1&2&3&4\\\hline 5&6\\\cline{1-2}\end{array}\quad \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1&2&3&5\\\hline 4&6\\\cline{1-2}\end{array}\quad \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1&2&4&5\\\hline 3&6\\\cline{1-2}\end{array}\quad \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1&3&4&5\\\hline 2&6\\\cline{1-2}\end{array}\quad \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1&2&3&6\\\hline 4&5\\\cline{1-2}\end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1&2&4&6\\\hline 3&5\\\cline{1-2}\end{array}\quad \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1&3&4&6\\\hline 2&5\\\cline{1-2}\end{array}\quad \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1&2&5&6\\\hline 3&4\\\cline{1-2}\end{array}\quad \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1&3&5&6\\\hline 2&4\\\cline{1-2}\end{array}$$

*Felly,* $\dim V_\lambda = 9$. *Gallwch wirio bod y fformiwla uchod yn rhoi* 9 *yn yr enghraifft hon hefyd.*

Yn gyffredinol, mae cyfrifo sut y bydd trynewidiad $\sigma$ yn gweithredu ar yr elfen sylfaen $v_T$ yn broblem gyfuniadol anodd. Fodd bynnag, yn nodwedd sero, gallwn ddefnyddio theori bwerus *nodau* (*character theory*) i gyfrifo cynrychioliadau $\mathfrak{S}_n$ yn effeithlon. Ni fyddwn yn esbonio hyn, ond cyfeiriwn y darllenydd sydd â diddordeb at James et al. (2001) neu Serre (1977).

## 1.6 Nodwedd bositif

Os yw nodwedd $\mathbb{K}$ yn $p \leq n$, yna mae theori cynrychioliadau'r grŵp cymesur yn llawer (llawer!) mwy cymhleth. Fel y nodwyd uchod yn yr ateb i gwestiwn (B), mae Theorem Maschke yn methu yn y sefyllfa hon ac mae'n anodd iawn (ac yn gyffredinol yn broblem agored) disgrifio sut mae cynrychioliad mympwyol wedi ei adeiladu o'r cynrychioliadau anostyngadwy. Os byddwn yn canolbwyntio yn hytrach ar y cynrychioliadau anostyngadwy, yna mae'n bosibl eu paramedru, ond mae'n anodd iawn dweud llawer mwy. Yn y sefyllfa hon, mae'r cynrychioliad anostyngadwy yn parhau wedi ei baramedru gan ymraniadau o $n$, ond nid yw pob ymraniad bellach yn digwydd. Yn fwy manwl, efallai y bydd sawl ymraniad yn labelu'r un cynrychioliad anostyngadwy, felly mae'n rhaid i ni ddod o hyd i ffordd o ddewis dim ond un o'r ymraniadau hyn. Rhoddodd Brauer ffordd o baramedru'r cynrychioliadau anostyngadwy o $\mathfrak{S}_n$ yn nodwedd bositif yn ei waith ar theori cynrychioliadau modiwlaidd (*modular representation theory*) yn y 1930au; gweler Brauer et al. (1945). Rhoddwyd ateb mwy manwl gan Robinson (1947).

**Theorem 10** (R. Brauer, G. Robinson)**.** *Mae'r ymraniadau p-cyson o n yn gweithredu fel paramedr ar gyfer cynrychioliadau anostyngadwy $\mathfrak{S}_n$.*

Mae ymraniad yn $p$-cyson os oes dim ond $p-1$ neu lai o resi â'r un hyd. Er enghraifft, os yw

$$\lambda = \ydiagram{4,2,2,2}$$

yna mae $\lambda$ yn 5-cyson, ond nid yn 3-cyson. Yn seiliedig ar Theorem 7 a Canlyneb 8, mae'n naturiol i ofyn:

- Beth yw sylfaen $V_\lambda$ os yw $\lambda$ yn $p$-cyson?

Neu, yn haws,

- Beth yw dimensiwn $V_\lambda$ os yw $\lambda$ yn $p$-cyson?

Yn ei bapur (tua 60 mlynedd ar ôl gwaith Brauer!), rhoddodd James (1990) algorithm dyfaliadol (*conjectural*) penodol, ond technegol, ar gyfer cyfrifo dimensiwn y cynrychioliadau anostyngadwy mewn nodwedd bositif. Fodd bynnag, yn llawer mwy diweddar, mae gwaith rhyfeddol Williamson (2017) wedi dangos bod dyfaliad James (yn anobeithiol) yn anghywir. Hyd yn hyn, nid oes unrhyw sôn am ddyfaliad newydd ynglŷn â'r ateb cywir.

Rydym wedi rhoi cyflwyniad arwynebol iawn i theori cynrychioliadau grŵp. Am gyflwyniad mwy cynhwysfawr, gweler James et al. (2001) neu Serre (1977). Yn benodol, dylem sôn bod y ffynonellau hyn yn disgrifio theori nodau grŵp meidraidd (a grybwyllir yn fyr uchod), sy'n gysyniad sylfaenol wrth ymdrin â chynrychioliadau.

## 1.7 Cyfraniad mathemategwyr o Gymru

Mae mathemategwyr o Gymru wedi chwarae rhan syfrdanol o bwysig yn natblygiad theori cynrychioliadau'r grŵp cymesur. Nid yw'r awdur yn gymwys i roi disgrifiad manwl a systematig o hyn, ond hoffem sôn yn benodol am waith D. E. Littlewood, A. Morris ac A. Richardson.

Tra oeddynt yng Ngholeg y Brifysgol, Abertawe, dechreuodd Littlewood a Richardson gydweithio er mwyn datblygu'r cysylltiad rhwng theori cynrychioliadau y grŵp cymesur a theori ffwythiannau cymesur (*symmetric functions*). Yn ystod yr adeg hon, gwnaethant ddarganfod eu rheol gyfuniadol 'Littlewood-Richardson' ar gyfer cyfrifo lluosogrwydd cynrychioliad anostyngadwy $V_\lambda$ mewn cynrychioliad anwythol (*induced representation*) $\mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_m}^{\mathfrak{S}_{n+m}} V_\mu \otimes V_\nu$. Mae'r lluosogrwydd $c_{\mu,\nu}^{\lambda}$ hwn bellach yn cael ei alw'n 'cyfernod Littlewood-Richardson'. Gwnaeth Littlewood gyfraniadau pwysig pellach mewn theori ffwythiannau cymesur, e.e. wrth astudio 'polynomialau Hall-Littlewood' (a gyflwynwyd yn wreiddiol gan Hall, sydd nawr yn cael eu labeli gan y ddau enw oherwydd cyfraniadau Littlewood) a hefyd trwy gyflwyno 'amnewidiadau plethystic'. Cyfrannodd hefyd yn fawr at y gymuned fathemateg yng Nghymru, ac yntau'n bennaeth adran ym

Mangor ers blynyddoedd lawer. Am adolygiad cynhwysfawr o gyfraniadau Littlewood at fathemateg, gweler ysgrif goffa Morris-Baker (Morris et al., 1983).

Hefyd, dylem sôn am waith A. Morris, a wnaeth waith pwysig ar ddatblygu ymhellach theori polynomialau Hall-Littlewood (gyda chymwysiadau i theori cynrychioliadau'r grŵp llinol cyffredinol (*general linear group*)), a hefyd mewn theori cynrychioliad tafluniol (*projective representations*) y grŵp cymesur.

## 2 Rhan II: Hynodion cyniferydd

Gwelsom eisoes y gallwn ddisgrifio'n eithaf hawdd (o leiaf ar lefel fras) y cynrychioliadau anostyngadwy grŵp meidraidd penodol. Ar gyfer cynrychioliad penodol $V$ o grŵp $G$, gallwn ddechrau gofyn cwestiynau manylach. Er enghraifft, sut mae orbitau $G$ o fewn $V$ yn edrych?

Gan fod nifer yr orbitau yn anfeidraidd, nid yw'n bosibl eu rhestru i gyd. Yn lle hynny, gallwn geisio astudio'r *gofod $G$-orbitau*. Mae gan y gofod strwythur algebraidd naturiol; yn fwy manwl, mae'r gofod yn enghraifft o *amrywiad affin* (*affine variety*)[1]. Yn fanylach, rydym yn diffinio

$$V/G := \operatorname{Spec} \mathbb{C}[V]^G,$$

fel bod pwyntiau caeedig $V/G$ yn union y $G$-orbitau yn $V$. Yma, $\mathbb{C}[V]^G$ yw is-algebra $\mathbb{C}[V]$, sy'n cynnwys pob polynomial sy'n sefydlog o dan weithred $G$. Mae pŵer y diffiniad hwn yn deillio o'r ffaith fod strwythur $V/G$ fel amrywiad affin yn adlewyrchu (mewn ffordd eithaf cymhleth) gweithred $G$ ar $V$. Yna gallwn ddefnyddio offer geometreg algebraidd i astudio'r gofod $V/G$.

Dangosir hyn gan y Theorem Chevalley-Shephard-Todd glasurol. Yn gyntaf, medrwn dybio bod $G \subset GL(V)$ yn gweithredu'n ffyddlon ar $V$. Yna dywedir bod $s \in G$ yn *adlewyrchiad* os yw $\mathrm{rc}(1-s) = 1$, lle y mae rc yn dynodi ranc y matrics. Mewn geiriau eraill, mae gan $s$ un gwerth eigen annistadl yn union. Os yw $S \subset G$ yn dynodi set yr holl adlewyrchiadau, yna dywedwn fod $G$ yn *grŵp adlewyrchiad cymhlyg* (*complex reflection group*) os yw $S$ yn cynhyrchu $G$.

**Theorem 11.** *Mae'r gofod $V/G$ yn llyfn os – a dim ond os – yw $G$ yn grŵp adlewyrchiad cymhlyg.*

Sylwch fod bod yn grŵp adlewyrchiad cymhlyg mewn gwirionedd yn briodwedd gweithred $G$ ar $V$. Yn y sefyllfa lle y mae $V/G$ yn llyfn, mae'n dilyn fod $V/G \cong \mathbb{A}^n$ lle y mae $n = \dim V$; hynny yw, mae $\mathbb{C}[V]^G$ yn algebra polynomial.

### 2.1 Gweithred Symplegol

Yn y rhan fwyaf o achosion, bydd gan y gofod fector $V$ strwythur ychwanegol, a byddwn yn tybio bod $G$ yn parchu'r strwythur ychwanegol. Yn ein sefyllfa ni, byddwn yn

[1] Ni fyddwn yn amlinellu ffeithiau sylfaenol geometreg algebraidd yma, ond cyfeiriwn y darllenydd at y testun safonol (Hartshorne 1977).

cymryd yn ganiataol fod $V$ yn *ofod fector symplectig*; hynny yw, mae yna ffurf ddeulinol annirywiedig (non-degenerate bilinear form) $\omega\colon V \times V \to \mathbb{C}$ sy'n wrthgymesur:

$$\omega(v, w) = -\omega(w, v), \quad \forall\, v, w \in V.$$

Yn benodol, mae hyn yn golygu bod $V$ yn eil-ddimensiynol (*even dimensional*). Nawr, byddwn yn tybio bod $V$ yn symplectig a bod $G$ yn parchu $\omega$. Hynny yw,

$$\omega(g \cdot v, g \cdot w) = \omega(v, w), \quad \forall\, v, w \in V,\ g \in G.$$

Yn yr sefyllfa hon, mae determinant pob $g \in G$ yn hafal i un, felly nid yw $G$ *yn gallu cynnwys unrhyw adlewyrchiadau o gwbl.* Yn benodol, mae hyn yn golygu bod $V/G$ bob amser yn hynod (*singular*) pan nad yw $G$ yn annistadl.

Er mwyn deall yr hynodion hyn yn well, a'r ffyrdd y maent yn amgodio gwybodaeth am weithred $G$ ar $V$, rydym yn cymryd yr agwedd safonol mewn geometreg algebraidd ac yn ystyried cydraniadau. I ni, bydd cydraniad gofod hynod bob amser yn golygu morffedd tafluniol deugymarebol (*birational projective morphism*) $\pi : Y \to V/G$ o amrywiad affin llyfn $Y$.

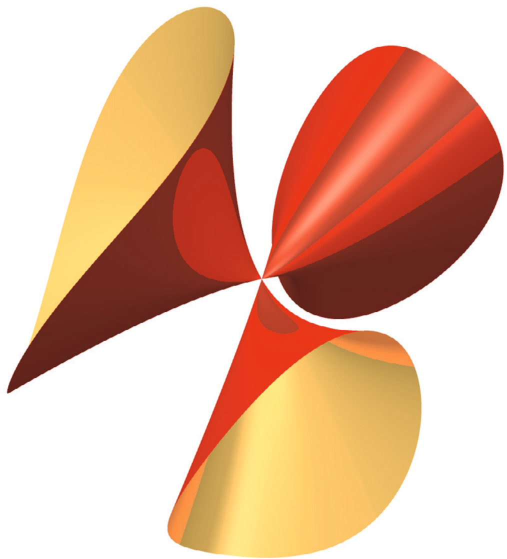
Fel y dangosir gan yr hynodion Kleinaidd isod, mae cydraniad mympwyol y gofod $V/G$ yn rhy bell o $V/G$ i gofio gwybodaeth ystyrlon am weithred $G$ ar $V$. Felly rydym yn chwilio am gydraniad minimol. Yn nimensiwn dau, mae cydraniad minimol yr hyn y byddech chi'n ei ddisgwyl – cydraniad unigryw y mae pob cydraniad arall yn ffactorio trwyddo. Yn anffodus, mewn dimensiynau uwch, nid yw'r cydraniad minimol yn yr ystyr cryf hwn yn bodoli. Cynigiwyd diffiniad addas arall gan Reid. Cyflwynodd y syniad o *gydraniad crepant* – y cydraniad heb 'discrepancy'; gweler Reid (1981) am yr union ddiffiniad. Yn nimensiwn dau, mae'r cydraniad yn grepant os, a dim ond os, yw'n finimol. Fodd bynnag, mae gan y diffiniad amgen hwn ddiffyg sylweddol hefyd; yn gyffredinol nid oes angen i gydraniad crepant fodoli! Mae hyn yn cymell y broblem allweddol:

Dosbarthwch y grwpiau meidraidd $G \subset \mathrm{Sp}(V)$ fel bod gan $V/G$ gydraniad crepant.

Trwy gydweddiad â'r Theorem Chevalley-Shephard-Todd, y canlyniad allweddol sy'n gwneud y broblem uchod yn hydrin yw (Verbitsky 2000):

**Theorem 12.** *Os oes gan y gofod $V/G$ gydraniad crepant, yna mae $G$ yn grŵp adlewyrchiad symplectig.*

Yma, dywedwn fod $s \in G$ yn *adlewyrchiad symplectig* os yw $\mathrm{gr}(1 - s) = 2$; hynny yw, mae gan $s$ union dau gwerth eigen annistadl (y nifer lleiaf posibl yn $\mathrm{Sp}(V)$, heb orfodi $s = 1$). Yna mae $G$ yn *grŵp adlewyrchiad symplectig* os yw $G = \langle \mathcal{S} \rangle$, lle mai $\mathcal{S} \subset G$ yw'r set o bob adlewyrchiad symplectig. Mae'n hawdd dangos y gellir mynegi pob grŵp adlewyrchiad symplectig fel lluoswm o 'grwpiau adlewyrchiad symplectig sy'n symplectig anostyngadwy'. Hynny yw, nid oes dadelfeniad o $V$ mewn i swm union $V_1 \oplus V_2$ o $G$-is-cynrychioliadau gyda phob $V_i \subset V$ yn is-ofod symplectig. Dosbarthwyd



Ffigur 1: Sleis real o'r hynodyn Kleinaidd $D_3$.

y grwpiau hyn gan Cohen (1980). Diffinnir *ranc* grŵp adlewyrchiad symplectig i fod yn ddimensiwn y gofod $V$.

Yn anffodus, yn wahanol i'r Theorem Chevalley-Shephard-Todd, nid yw Theorem Verbistky yn ddatganiad 'os, a dim ond os'. Mae llawer o enghreifftiau o grwpiau adlewyrchiad symplectig lle nad oes gan $V/G$ gydraniad crepant.

## 2.2 Hynodion Kleinaidd

Fel y nodwyd uchod, mae dimensiwn gofod fector symplectig bob amser yn eilrif. Felly, y dimensiwn lleiaf posibl ar gyfer $V$ yw 2. Yn y sefyllfa hon, mae $\mathrm{Sp}(V) = \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$, ac yr ydym yn ystyried hynodion cyniferydd sy'n cyfateb i is-grwpiau meidraidd o $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$. Mae dosbarthiad is-grwpiau meidraidd o $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$, hyd at gyfiaeth (*up to conjugacy*), yn ganlyniad clasurol sydd yn dyddio'n ôl i waith Felix Klein. Fe gofiwn fod y grwpiau'n cael eu dosbarthu gan ddiagram Dynkin ymyl syml (os nad ydych chi'n gyfarwydd â'r syniad hwn gweler e.e. Humphreys (1972)). Ar ben hynny, fel amrywiad affin, mae'r hynodion cyniferydd cyfatebol $\mathbb{C}^2/G$ yn hyperarwyneb $V(f) \subset \mathbb{C}^3$. Rydym yn rhestru'r grwpiau, a'r hafaliad diffiniol cyfatebol $f = 0$, yn y tabl (4).

| Diagram | Grŵp | Hafaliad |
|---|---|---|
| $A_n, n \geq 1$ | Cylchol $\mathbb{Z}_{n+1}$ | $xy - z^{n+1} = 0$ |
| $\mathsf{D}_n, n \geq 3$ | Dihedrol deuaidd $\mathsf{BD}_{4(n-2)}$ | $x^2 + y^2 z + z^{n-1} = 0$ |
| $E_6$ | Tetraherdrol deuaidd $\mathsf{T}$ | $x^2 + y^3 + z^4 = 0$ |
| $E_7$ | Octahedrol deuaidd $\mathsf{O}$ | $x^2 + y^3 + yz^3 = 0$ |
| $E_8$ | Icosahedrol deuaidd $\mathsf{I}$ | $x^2 + y^3 + z^5 = 0$ |

(4)

Y grŵp deuhedrol deuaidd $\mathsf{BD}_{4m}$, o faint $4m$, yw'r is-grŵp o $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ wedi ei gynhyrchu gan

$$g = \begin{pmatrix} \epsilon & 0 \\ 0 & \epsilon^{-1} \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

lle y mae $\epsilon$ yn isradd $(2m)$ed cyntefig o un. Mae gan grwpiau tetrahedrol deuaidd $\mathsf{T}$, octahedrol deuaidd $\mathsf{O}$, ac icosahedrol deuaidd $\mathsf{I}$ faint $24, 48$ a $120$, yn y drefn honno. Maent yn orchudd dwbl y grwpiau cymesuredd cylchdro o'r solidau Platonaidd tri-dimensiwn cyfatebol. Os cymerwn $G = \mathsf{BD}_4$ o fath $D_3$, yna mae sleis real o'r hynodyn Kleinaidd $\mathbb{C}^2/G$ i'w weld yn Ffigur 1.

Fel yr eglurwyd yn flaenorol, gan ein bod ni yn nimensiwn dau, mae'r cydraniad minimol unigryw o'r hynodyn $V/G$. Gellir creu hyn trwy 'ffrwydro' (*blowup*) dro ar ôl tro o'r *locws hynod (gostyngol)* (*(reduced) singular locus*). Nid oes angen i chi stopio yno – gallwch barhau i ffrwydro pwyntiau gynifer o weithiau ag yr hoffech er mwyn creu llawer o gydraniadau gwahanol. Fodd bynnag, mae'n llawer anos i echdynnu gwybodaeth am yr hynodyn gwreiddiol o'r cydraniad newydd hwn. Am gyflwyniad i'r cysyniad o ffrwydro, gweler Adran II.7 o Hartshorne (1977) ac yng nghyd-destun arwynebau, Adran V.5, Hartshorne (1977).

### 2.3 Anffurfiadau Poisson

Nod gweddill rhan 2 yw esbonio sut y gellir defnyddio theori cynrychioliadau i ddosbarthu'r grŵpiau $G$ lle y mae gan $V/G$ gydraniad crepant. Yn gyntaf, rhaid inni egluro sut mae cydraniad crepant yn gysylltiedig ag *anffurfiadau Poisson* (*Poisson deformations*) o $V/G$. Mae gan y gofod $V/G$ ddwy nodwedd bwysig. Yn gyntaf, mae'r weithred raddol o $\mathbb{C}^\times$ ar $V$ yn cymudo gyda gweithred $G$, felly mae'n disgyn i weithred o $\mathbb{C}^\times$ ar $V/G$. Yn ail, mae'r ffaith bod $V$ yn ofod fector symplectig yn golygu bod gan $V$ strwythur amrywiad affin Poisson; gweler Brown et al. (2003) a chyfeiriadau ynddo ar gyfer y syniad pwysig hwn. Unwaith eto, mae'r ffaith bod $G$ yn parchu'r strwythur symplectig yn golygu bod y braced Poisson (*Poisson bracket*) ar $V$ yn disgyn i fraced Poisson ar $V/G$. Yn algebraidd, mae hyn yn syml yn dweud bod $\mathbb{C}[V]^G$ yn is-algebra Poisson o $\mathbb{C}[V]$. Yn anhygoel, dangoswyd gan Namikawa (2011) a Ginzburg-Kaledin (2004) bod perthynas agos rhwng cydraniad crepant ac anffurfiadau o $V/G$ sy'n parchu'r strwythur Poisson a'r weithred $\mathbb{C}^\times$.

Yn gyntaf, dywedwn fod pâr $f : X \to S$ yn *anffurfiad Poisson graddedig* (*graded Poisson deformation*) o $V/G$ os yw:

(a) $f$ yn forffedd fflat rhwng amrywiadau affin Poisson, lle y mae'r strwythur Poisson ar $S$ yn ddistadl.

(b) $\mathbb{C}^\times$ yn gweithredu ar $X$ a $S$, ac yn cymudo gyda $f$.

(c) yna pwynt $s_0 \in S$, wedi eu gosod gan $\mathbb{C}^\times$, a isomorffedd Poisson graddedig

$$f^{-1}(s_0) \cong V/G.$$

(ch) y weithred $\mathbb{C}^\times$ ar $X$ yn parchu'r[2] strwythur Poisson.

Noder bod (a) yn golygu bod pob ffibr o $f$ yn fanffold Poisson.

**Theorem 13** (Namikawa)**.** *Mae yna anffurfiad Poisson graddedig cynhwysol (universal)* $\rho : \mathfrak{X} \to H/W$ *o* $V/G$*.*

Yn gynhwysol, rydym yn golygu os yw $f : X \to S$ yn unrhyw anffurfiad Poisson graddedig o $V/G$, yna mae morffedd unigryw $S \to H/W$ fel bod $X \cong S \times_{H/W} \mathfrak{X}$. Yma, mae $H$ yn ofod fector penodol a $W$ yn grŵp meidraidd sy'n gweithredu fel grŵp adlewyrchu ar $H$; mae'r cyniferydd $H/W$ felly'n llyfn oherwydd Theorem 11.

Mae'r berthynas â chydraniadau crepant yn cael ei roi gan:

**Theorem 14** (Namkiawa, Ginzburg-Kaledin)**.** *Mae gan* $V/G$ *gydraniad crepant os, a dim ond os, oes yna anffurfiad Poisson graddedig* $f : X \to S$ *fel bod y ffibr generig* $f^{-1}(s)$ *yn llyfn.*

Mae bodolaeth anffurfiad Poisson graddedig cynhwysol yn golygu ei fod yn ddigon i wirio bod ffibrau generig yr anffurfiad cynhwysol yn llyfn.

**Canlyneb 15.** *Mae gan* $V/G$ *cydraniad crepant os, a dim ond os, yw ffibr generig* $\rho^{-1}(h)$ *o* $\rho$ *yn llyfn.*

### 2.4 Gofod Calogero-Moser

Gyda'r canlyniadau uchod, mae ffocws ein problem yn troi at adeiladu anffurfiadau Poisson graddedig o $V/G$. Pŵer y safbwynt hwn yw y gallwn nawr ddechrau defnyddio theori cynrychioliadau ac algebra anghymudol (*non-commutative algebra*) er mwyn ceisio adeiladu'r anffurfiadau. Dyma oedd un o'r cymhellion y tu ôl i waith Etingof-Ginzburg et al. (2002), lle y cyflwynwyd y dosbarth rhyfeddol o algebrâu anghymudol a elwir yn *algebrâu adlewyrchiad symplectig.* Ni fyddwn yn rhoi'r diffiniad o'r algebrâu hyn, gan nad yw'n hanfodol ar gyfer y stori, ond rydym yn esbonio sut mae'r algebrâu'n cael eu paramedru. Yn gyntaf, nodwn fod y set $\mathcal{S}$ o adlewyrchiadau symplectig yn uniad o ddosbarthiadau cyfiaeth $G$. Felly, rydym yn diffinio

$$\mathfrak{c} = \{c : \mathcal{S} \to \mathbb{C} \mid c \text{ yn sefydlog ar ddosbarthiadau cyfiaeth}\},$$

y gofod o bob ffwythiant o $\mathcal{S} \subset G$ i $\mathbb{C}$ sydd yn sefydlog ar bob dosbarthiad cyfiaeth. Am bob $c \in \mathfrak{c}$, adeiladodd Etingof a Ginzburg algebra adlewyrchiad symplectig $H_c(G)$. Dangoswyd bod yr algebra $H_c(G)$ yn gynrychioliaeth meidraidd dros ei ganol $Z_c(G)$, a bod y teulu

$$X_{\mathfrak{c}}(G) := \{X_c(G) \mid c \in \mathfrak{c}\} \to \mathfrak{c},$$

lle y mae $X_c(G) := \operatorname{Spec} Z_c(G)$, yn anffurfiad Poisson graddedig o $X_0(G) = V/G$.

[2]Gweler §3.3 o Bellamy (2016) er mwyn gweld yn union beth mae hyn yn ei olygu.

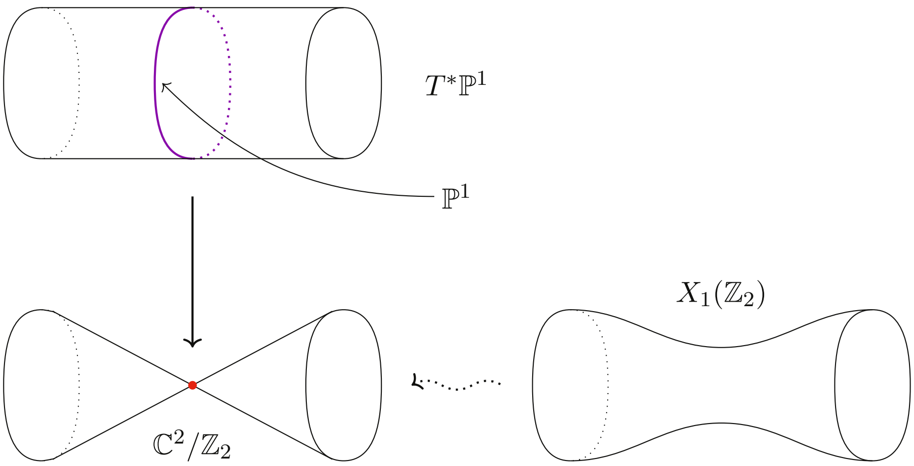
Mae hyn yn awgrymu bod morffedd unigryw $\nu\colon \mathfrak{c} \to H/W$ fel bod $X_{\mathfrak{c}}(G) = \mathfrak{c} \times_{H/W} \mathfrak{X}$. Dangosodd Ginzburg-Kaledin et al. (2004) fod y map $\nu$ yn generig *'etale*. Yn fanylach, rydym yn dangos yn Bellamy (2016) fod:

**Theorem 16.** *Mae isomorffedd $\mathfrak{c} \xrightarrow{\sim} H$, sy'n cymudo gyda gweithred $W$, fel bod y diagram*

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{c} \arrow[rr, "\sim"] \arrow[dr, "\nu"'] & & H \arrow[dl, "q"] \\ & H/W & \end{tikzcd}$$

*yn cymudo. Yma, $q : H \to H/W$ yw'r morffedd cyniferydd.*

**Canlyneb 17.** *Mae gan $V/G$ gydraniad crepant os, a dim ond os, yw'r gofod Calogero-Moser $X_c(G)$ yn llyfn am $c$ generig.*




Ffigur 2: Y cydraniad minimol a'r anffurfiad Calogero-Moser o'r hynodion cyniferydd yn cyfateb i $\mathbb{Z}_2$.

Yn rhyfeddol, ceir maen prawf hawdd iawn er mwyn penderfynu a yw'r gofod $X_c(G)$ yn llyfn ai peidio, trwy ddefynddio theori cynrychioliadau'r algebra $H_c(G)$.

**Theorem 18** (Etingof-Ginzburg)**.** *Am bob $c \in \mathfrak{c}$:*

*(a) Os yw $L$ yn gynrychioliad anostyngadwy o $H_c(G)$, felly* $\dim L \leq |G|$.

*(b) Mae $X_c(G)$ yn llyfn os, a dim ond os,* $\dim L = |G|$ *am bob cynrychioliad anostyngadwy $L$ o $H_c(G)$.*

Felly, er mwyn penderfynu a yw $V/G$ gyda cydraniad crepant, mae'n ddigon i gyfrifo dimensiwn pob cynrychioliad anostyngadwy o $H_c(G)$, pan fo $c$ yn generig. Yn anffodus, mae hyn ychydig yn fwy anodd nag y mae'n ymddangos. Er hynny, rydym wedi gallu gwneud hyn nawr ar gyfer y rhan fwyaf o grwpiau adlewyrchiad symplectig.

**Enghraifft 19.** *Pan fo $G = \mathbb{Z}_2$, sy'n gweithredu ar $\mathbb{C}^2$, o fath $A_1$, mae gan ganol yr algebra adlewyrchiad symplectig $H_c(\mathbb{Z}_2)$ gyda chyflwyniad*

$$Z_c(\mathbb{Z}_2) \cong \frac{\mathbb{C}[x, y, z]}{(xy - (z + c)(z - c))}.$$

*Felly mae'r gofod $X_c(\mathbb{Z}_2)$ yn hafal â $V(xy-(z+c)(z-c)) \subset \mathbb{C}^3$. Fel y mae $c$ yn amrywio dros $\mathbb{A}^1$, mae hyn yn rhoi anffurfiad Poisson graddedig o $V(xy - z^2)$. Nodwn fod y gofod hwn yn llyfn am bob $c \neq 0$. Rhoddir y cydraniad minimol gan $T^*\mathbb{P}^1$, y gellir ei adeiladu trwy ffrwydro'r hynodyn yn $V(xy - z^2)$ unwaith. Dangosir y gosodiad hwn yn Ffigwr 2.*

## 2.5 Y dosbarthiad

Mae dosbarthiad y hynodion cyniferydd symplectig $V/G$ â chydraniadau crepant bron yn gyflawn. Fodd bynnag, mae angen delio â nifer o enghreifftiau o hyd. Dosbarthwyd y grwpiau adlewyrchiad symplectig gan Cohen (1980). Er mwyn gallu defnyddio ei ddosbarthiad yn effeithiol, rydym yn rhannu'r grwpiau yn bedwar dosbarth gwahanol.

Yn gyntaf, rydym yn cyflwyno rhywfaint o derminoleg. Mae grŵp adlewyrchiad symplectig $G$ yn *briodol* (*proper*) os nad oes is-ofod Lagrangaidd $G$-sefydlog $\mathfrak{h}$ er mwyn bod $V \cong \mathfrak{h} \times \mathfrak{h}^*$, fel cynrychioliad $G$-symplectig. Nesaf, dywedir bod y grŵp $G$ yn *anghysefinol* (*imprimitive*) os oes dadalfeniad o swm union $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_r$ yn is-ofodau priodol fel bod: am bob $g \in G$ a $1 \leq i \leq r$, mae yna $j$ gyda $g(V_i) \subset V_j$. Dywedwn fod $G$ yn *symplectig anghysefinol* os yw pob $V_i$ yn is-ofod symplectig o $V$ yn y dadalfeniad uchod. Mae'n bwysig nodi bod grwpiau adlewyrchiad symplectig sy'n anghysefinol ond nid yn symplectig anghysefinol. Cofiwch fod pob grŵp adlewyrchiad symplectig yn lluoswm (unigryw) o grwpiau adlewyrchiad symplectig sy'n symplectig anostyngadwy. Rydym yn tybio nawr fod pob grŵp yn symplectig anostyngadwy. Gallwn rannu'r grŵpiau yn bedwar dosbarth fel a ganlyn:

(i) grwpiau adlewyrchiad symplectig nad yw'n briodol,

(ii) grwpiau adlewyrchiad symplectig priodol sydd yn symplectig anghysefinol,

(iii) grwpiau adlewyrchiad symplectig priodol sydd yn anghysefinol ond nid yn symplectig anghysefinol; a

(iv) grwpiau adlewyrchiad symplectig priodol nad yw'n anghysefinol.

Yn gymharol, mae gan ychydig iawn o'r grwpiau adlewyrchiad symplectig gydraniadau crepant. Felly, byddwn yn gyntaf yn rhestru'r grwpiau hynny sydd â chydraniadau crepant. Yna, byddwn yn disgrifio, ar gyfer pob un o'r pedwar dosbarth uchod, y grwpiau hynny nad ydym yn gwybod o hyd a oes ganddynt gydraniad crepant ai peidio.

**Theorem 20.** *Mae gan y grwpiau adlewyrchiad symplectig canlynol gydraniadau crepant:*

*(a) Y lluoswm torch (wreath product) $\mathfrak{S}_n \wr \Gamma$ yn gweithredu ar $(\mathbb{C}^2)^n = \mathbb{C}^{2n}$, lle y mae $\Gamma \subset \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ yn grŵp meidraidd.*

(b) *Y grŵp adlewyrchiad cymhlyg* $G_4$ *yn gweithredu ar y cynrychioliad pedwar dimensiwn* $\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}^*$.

(c) *Y grŵp adlewyrchiad symplectig pedwar dimensiwn* $Q_8 \times_{\mathbb{Z}_2} D_8$*, lle mai* $Q_8$ *yw'r grŵp cwaternion o faint* 8 *a* $D_8$ *yw'r grŵp deuhedrol o faint* 8.

Mae sefyllfa (a) yn glasurol. Yn y sefyllfa hon, os mai $Y \to \mathbb{C}^2/\Gamma$ yw cydraniad minimol y hynodyn Kleinaidd $\mathbb{C}^2/\Gamma$, yna mae'r cynllun Hilbert (*Hilbert scheme*) $\mathrm{Hilb}^n Y$ yn gydraniad crepant o $\mathbb{C}^{2n}/G$; gweler Nakajima (1999). Fel yr ydym wedi nodi yn adran **??**, mae'r is-grŵpiau meidraidd $\Gamma$ o $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ yn cael eu dosbarthu i fyny at gyfiaeth gan ddiagram Dynkin ymyl syml. Os yw $\Gamma = \mathbb{Z}_\ell$ o fath $A$ yna mae $\mathfrak{S}_n \wr \Gamma$ yn grŵp adlewyrchiad symplectig nad yw'n briodol (mae'n perthyn i ddosbarth (i)). Os yw $\Gamma$ o fath $D$ neu $E$ yna, o leiaf am $n \geq 2$, mae'r grŵp $\mathfrak{S}_n \wr \Gamma$ o fath (ii).

Mae'r grŵp $G_4$ sy'n ymddangos yn (b) hefyd yn enghraifft o grŵp adlewyrchiad symplectig nad yw'n briodol; dyma'r cyntaf o'r grwpiau adlewyrchiad cymhlyg eithriadol, ac yn haniaethol isomorffig i'r grŵp tetrahedrol deuaidd. Darganfuwyd y ffaith fod ganddo gydraniad crepant yn gyntaf gan yr awdur yn Bellamy (2009). Adeiladwyd cydraniadau crepant pendant yn Lehn et al. (2010). Mae'r grŵp a restrir yn (c) yn perthyn i ddosbarth (ii). Mewn cyhoeddiad a ysgrifennwyd gan yr awdur a T. Schedler (Bellamy et al., 2013), darganfuwyd y ffaith fod ganddo gydraniad crepant yn gyntaf. Gan ddefnyddio cylchoedd Cox, adeiladodd Donten-Bury a Wiśniewski (Donten-Bury et al. 2017) bob cydraniad crepant posibl o'r hynodyn hwn (yn rhyfeddol, mae yna 81 cydraniad gwahanol).

Yn olaf, rydym yn egluro'r sefyllfa gyfredol trwy restru, am bob un o'r dosbarthiadau uchod, y grwpiau hynny yn y dosbarth na wyddom os oes gan yr hynodyn cyniferydd symplectig cyfatebol gydraniad crepant ai peidio.

(i) Yn y sefyllfa hon, mae'r dosbarthiad wedi ei gwblhau; gweler Bellamy (2009).

(ii) Yn y sefyllfa hon, mae'r dosbarthiad hefyd wedi ei gwblhau ac eithrio pan fo $G$ yn bedwar dimensiwn. Yn nodiant Cohen (1980), rydym yn gwybod pan fo gan yr hynodyn gyniferydd cydraniad crepant heblaw os yw $G$ yn perthyn i un o'r teuluoedd (G), (K), (P), (Q), (U) neu (V). Gweler Bellamy et al. (2016) am ragor o fanylion.

(iii) Dangoswyd gan Cohen (Cohen 1980) fod gan bob grŵp yn y dosbarth hwn ddimensiwn pedwar. Nid ydym yn gwybod os oes gan unrhyw un o'r grwpiau gydraniad crepant ai peidio.

(iv) Hyd at gyfiaeth, dim ond 13 o grwpiau adlewyrchiad symplectig priodol sydd heb fod yn anghysefinol. Fe'u rhestrir yn Nhabl III o Cohen (1980). Nid ydym yn gwybod os oes gan unrhyw un o'r grwpiau gydraniad crepant ai peidio.

Yn ogystal â gwaith Namikawa a Ginzburg-Kaledin a gyfeiriwyd ato uchod, mae'r dosbarthiad yn grynodeb o ganlyniadau o Gordon (2003), Bellamy (2009), Bellamy et al. (2013) a Bellamy et al. (2016).

## Cydnabyddiaeth

Hoffwn ddiolch i Travis Schedler am ein holl sgyrsiau ffrwythlon iawn ynglŷn â hynodion symplectig dros y blynyddoedd, ac i David Evans am awgrymu fy mod yn ysgrifennu'r erthygl hon yn y lle cyntaf. Diolch o galon i Tegau Andrews am ddarllen y testun mor fanwl a rhoi llawer o awgrymiadau sydd wedi helpu i wella'r erthygl yn aruthrol.

## Llyfryddiaeth

Bellamy, G. (2009), 'On singular Calogero-Moser spaces', *Bulletin of the London Mathematical Society*, 41 (2), 315–26.

Bellamy, G. (2016), 'Counting resolutions of symplectic quotient singularities', *Compositio Mathematica*, 152 (1), 99–114.

Bellamy, G., a Schedler, T. (2013), 'A new linear quotient of $\mathbf{C}^4$ admitting a symplectic resolution', *Mathematische Zeitschrift*, 273 (3–4), 753–69.

Bellamy, G., a Schedler, T. (2016), 'On the (non)existence of symplectic resolutions of linear quotients', *Mathematical Research Letters*, 23 (6), 1537–64.

Brauer, R., a Nesbitt, C. (1941), 'On the modular characters of groups', *Annals of Mathematics (2)*, 42, 556–90.

Brown, K. A., a Gordon, I. (2003), 'Poisson orders, symplectic reflection algebras and representation theory', *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 559, 193–216.

Cohen, A. M. (1980), 'Finite quaternionic reflection groups', *Journal of Algebra*, 64 (2), 293–324.

Curtis, C. W. (1999), *Pioneers of representation theory: Frobenius, Burnside, Schur, and Brauer*, cyfrol 15 o gyfres *History of Mathematics* (American Mathematical Society, Providence, RI; London Mathematical Society, London).

Donten-Bury, M., a Wiśniewski, J. A. (2017), 'On 81 symplectic resolutions of a 4-dimensional quotient by a group of order 32', *Kyoto J. Math.*, 57 (2), 395–434.

Etingof, P., a Ginzburg, V. (2002), 'Symplectic reflection algebras, Calogero-Moser space, and deformed Harish-Chandra homomorphism', *Invent. Math.*, 147 (2), 243–348.

Ginzburg, V., a Kaledin, D. (2004), 'Poisson deformations of symplectic quotient singularities', *Adv. Math.*, 186 (1), 1–57.

Gordon, I. G. (2003), 'Baby Verma modules for rational Cherednik algebras', *Bull. London Math. Soc.*, 35 (3), 321–36.

Hartshorne, R. (1977), 'Algebraic Geometry', *Graduate Texts in Mathematics*, 52 (New York: Springer-Verlag).

Humphreys, J. E. (1972), *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*, cyfrol 9 o gyfres Graduate Texts in Mathematics (New York: Springer-Verlag).

James, G. (1990), 'The decomposition matrices of $\mathrm{G}L_n(q)$ for $n \leq 10$', *Proc. London Math. Soc. (3)*, 60 (2), 225–65.

James, G., a Liebeck, M. (2001), *Representations and characters of groups*, ail argraffiad (New York: Cambridge University Press).

Lehn, M., a Sorger, C. (2010), 'A symplectic resolution for the binary tetrahedral group', *Séminaires et Congres*, 25, 427–33.

Morris, A. O., a Barker, C. C. H. (1983), 'Obituary: Dudley Ernest Littlewood', *Bull. London Math. Soc.*, 15 (1), 56–69.

Nakajima, H. (1999), *Lectures on Hilbert Schemes of Points on Surfaces*, cyfrol 18 o University Lecture Series (Providence, RI: American Mathematical Society).

Namikawa, Y. (2011), 'Poisson deformations of affine symplectic varieties', *Duke Math. J.*, 156 (1), 51–85.

Reid, M. (1983), 'Minimal models of canonical 3-folds', yn *Algebraic varieties and analytic varieties* (Tokyo, 1981), cyfrol 1 o Advanced Studies in Pure Mathematics (Amsterdam: North-Holland Publishing Co.), tt. 131–180.

Robinson, G. de B. (1947), 'On a conjecture by Nakayama', *Proceedings and transactions of the Royal Society of Canada. Sect. III. (3)*, 41, 20–25.

Serre, J. P., (1977), *Linear representations of finite groups* (Springer-Verlag, New York-Heidelberg). Cyfieithiwyd o'r ail argraffiad yn y Ffrangeg gan Scott, Leonard L, *Graduate Texts in Mathematics*, Vol. 42.

Verbitsky, M. (2000), 'Holomorphic symplectic geometry and orbifold singularities', *Asian Journal of Mathematics*, 4(3), 553–63.

Williamson, G. (2017), 'Schubert calculus and torsion explosion', *Journal of the American Mathematical Society*, 30(4), 1023–46. Gydag atodiad gan Alex Kontorovich a Peter J. McNamara.